

## EPREUVE A DU DEUXIEME GROUPE

### TRAITEMENT DE DONNEES

(Coefficient : 3..... - Durée : 3.. heures)

#### Matériel autorisé : calculatrice

*Il sera tenu le plus grand compte lors de la correction, du soin apporté à la justification des raisonnements et des calculs effectués, à la rédaction et à la présentation de la copie.*

#### Exercice 1 ( 7 points )

Afin de déterminer la dose anti-parasitaire à injecter à un animal, il convient de déterminer sa masse. La réalisation de la pesée n'étant pas toujours aisée, une estimation indirecte à partir du périmètre de la cage thoracique a été proposée par Wariss et Edwards en 1995.

Leur étude a porté sur 66 moutons dont le périmètre de la cage thoracique était compris entre 60 et 90 cm.

Pour faciliter les calculs, nous nous intéresserons à 12 animaux dont le périmètre, exprimé en cm, et la masse, exprimée en kg, sont répertoriés dans le tableau suivant :

|                 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Périmètre $x_i$ | 65 | 67 | 69 | 70 | 72 | 76 | 77 | 80 | 81 | 81 | 86 | 89 |
| Poids $y_i$     | 22 | 19 | 22 | 28 | 27 | 30 | 35 | 33 | 39 | 43 | 45 | 48 |

La variable  $X$  désigne le périmètre et la variable  $Y$  désigne la masse.

1. Construire le nuage de points de la série  $(x_i, y_i)$  dans le plan muni d'un repère orthogonal.
2. Donner une équation de la droite d'ajustement de  $Y$  en  $X$  obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à  $10^{-3}$  près.
3.
  - a. Calculer les résidus  $e_i$  de la régression définis par  $e_i = y_i - \hat{y}_i$  où  $\hat{y}_i$  est une estimation de  $y_i$  obtenue à l'aide de l'équation de la droite de régression.  
Les résultats seront arrondis à  $10^{-1}$  près.
  - b. Sur un deuxième graphique, représenter la série  $(x_i, e_i)$  dans le plan muni d'un repère orthogonal.

4.

- a. Déterminer la variance des résidus, notée  $V_{res}$ .
- b. Déterminer la variance de  $Y$ , notée  $V_Y$ .
- c. Compte tenu de la taille de cet échantillon, on considère que l'ajustement est pertinent si le rapport  $\frac{V_{res}}{V_Y}$  est inférieur à 0,3 (la variance résiduelle étant alors considérée négligeable par rapport à la variance totale). Vérifier que cette condition est réalisée dans le cas présent.

5. Déterminer une estimation de la masse d'un mouton dont le périmètre de la cage thoracique est égal à 93 cm.

**Exercice 2 ( 8 points)**

***Partie A***

Dans une coopérative agricole, une machine trie les pommes de terre en fonction de leur diamètre équatorial. On note  $X$  la variable aléatoire prenant pour valeur le diamètre, exprimé en centimètres, d'une pomme de terre prise au hasard dans la production. On admet que  $X$  est distribuée selon la loi normale de moyenne 4,5 et d'écart type 1,2.

1. Quelle est la probabilité qu'une pomme de terre prise au hasard dans la production ait un diamètre supérieur à 5,1 cm ?
2. Une pomme de terre est commercialisable si son diamètre est compris entre 3 et 6 cm. Calculer le pourcentage de pommes de terre commercialisables dans cette production.
3. Déterminer la valeur du nombre réel positif  $a$  tel que le pourcentage de pommes de terre ayant un diamètre appartenant à l'intervalle  $[4,5 - a ; 4,5 + a]$  soit de 95 %.

***Partie B***

On extrait un échantillon aléatoire et simple de 400 pommes de terre.

On désigne par  $\bar{X}$ , la variable aléatoire prenant pour valeur le diamètre moyen des pommes de terre de l'échantillon.

1. Donner la loi de probabilité de  $\bar{X}$  en précisant ses paramètres.
2. Calculer la probabilité suivante :  $P(4,38 < \bar{X} < 4,62)$ .

***Partie C***

Sur ce même échantillon de 400 pommes de terre on comptabilise 312 pommes de terre commercialisables.

1. Donner une estimation ponctuelle de la proportion  $p$  de pommes de terre commercialisables sur l'ensemble de la production.
2. Déterminer une estimation par intervalle de confiance de  $p$  au seuil de confiance 0,95.

**Exercice 3 ( 5 points )**

La fromagerie de Fontenille souhaite réaliser des tableaux de suivi de ses ventes de tomes pur chèvre. A l'aide d'un tableur, elle veut pouvoir calculer le prix HT, la remise attribuée et le prix TTC pour chaque commande, ainsi que le nombre de commandes ayant obtenu une remise.

- Une remise de 5% est attribuée pour les commandes ayant un montant HT strictement compris entre 500 € et 1000 € et une remise de 10% pour les commandes dont le montant HT est supérieur ou égal à 1000 €.
- Le taux de TVA est de 19,6%.

Dans un deuxième temps, elle souhaite relancer les ventes en menant une action publicitaire. Pour les fromages dont le prix unitaire TTC est au moins égal à 80 €, lorsque la quantité vendue est inférieure ou égale à 15 on relance la vente par une action publicitaire.

- On doit pouvoir faire varier le prix des fromages sans modifier les formules des tableaux récapitulatifs.

Vous concevrez les formules de calcul permettant de remplir automatiquement le tableau ci-dessous. Les cases grisées représentent les cellules contenant les formules à déterminer.

Pour chaque formule, vous indiquerez l'adresse de son emplacement dans le tableau et la zone de recopie éventuelle.

|    | A                | B                                | C                   | D          | E               | F                     | G                |
|----|------------------|----------------------------------|---------------------|------------|-----------------|-----------------------|------------------|
| 1  |                  | Quantité                         |                     |            |                 |                       |                  |
| 2  | N° commande      | Tome nature                      | Tome au muscadet    | Tome fumée | montant HT en € | Remise en €           | Montant TTC en € |
| 3  | 001              | 4                                | 2                   | 3          |                 |                       |                  |
| 4  | 002              | 7                                | 1                   | 0          |                 |                       |                  |
| 5  | 003              | 10                               | 8                   | 5          |                 |                       |                  |
| 6  | 004              | 3                                | 2                   | 8          |                 |                       |                  |
| 7  |                  | Nombre de commandes avec remises |                     |            |                 |                       |                  |
| 8  |                  |                                  |                     |            |                 |                       |                  |
| 9  |                  | Nbre de fromages                 | Action publicitaire |            |                 | Prix unitaire HT en € |                  |
| 10 | Tome nature      |                                  |                     |            | Tome nature     | 50                    |                  |
| 11 | Tome au muscadet |                                  |                     |            | Tome muscadet   | 70                    |                  |
| 12 | Tome fumée       |                                  |                     |            | Tome fumée      | 90                    |                  |

**BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR AGRICOLE**

**Formulaire de mathématiques**

**1. Relations fonctionnelles :**

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

**2. Dérivées des fonctions usuelles :**

| $f(x)$                                | $f'(x)$               | Intervalle de validité |
|---------------------------------------|-----------------------|------------------------|
| $\ln x$                               | $\frac{1}{x}$         | $]0, +\infty[$         |
| $e^x$                                 | $e^x$                 | $\mathbb{R}$           |
| $x^\alpha, (\alpha \in \mathbb{R}^*)$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $]0, +\infty[$         |
| $\sin x$                              | $\cos x$              | $\mathbb{R}$           |
| $\cos x$                              | $-\sin x$             | $\mathbb{R}$           |

**3. Primitives des fonctions usuelles :**

| $f(x)$                     | $F(x)$                                | Intervalle de validité |
|----------------------------|---------------------------------------|------------------------|
| $\frac{1}{x}$              | $\ln x + k$                           | $]0, +\infty[$         |
| $e^x$                      | $e^x + k$                             | $\mathbb{R}$           |
| $x^\alpha, \alpha \neq -1$ | $\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + k$ | $]0, +\infty[$         |
| $\cos x$                   | $\sin x + k$                          | $\mathbb{R}$           |
| $\sin x$                   | $-\cos x + k$                         | $\mathbb{R}$           |

$k$  désigne une constante réelle.

**4. Développements limités à l'ordre 1 :**

$$e^x = 1 + x + x\varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x\varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\ln(1+x) = x + x\varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\sin x = x + x\varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\cos x = 1 + \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + x\varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

**5. Statistique descriptive :****a) Moyenne arithmétique :**

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad ; \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i$$

**b) Variance et écart-type :**

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - (\bar{x})^2 \quad ; \quad \sigma_x = \sqrt{V}$$

**c) Ajustement affine par la méthode des moindres carrés :**

$$\text{Covariance : } \sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - \bar{x} \bar{y}$$

$$y = ax + b \quad ; \quad a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

**d) Corrélation linéaire :  $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$** **6. Probabilités :****a) Loi binomiale :**

$$\text{Prob}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{où} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

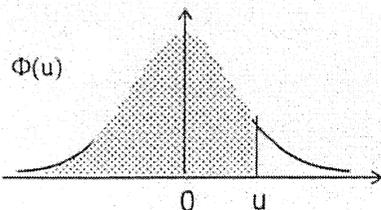
$$E(X) = np \quad ; \quad V(X) = np(1-p)$$

**b) Loi de Poisson :**

$$\text{Prob}(X = k) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!} \quad ; \quad E(X) = \lambda \quad ; \quad V(X) = \lambda$$

Fonction de répartition de la variable normale centrée réduite

$$\Phi(u) = \text{Prob}(U \leq u)$$



| u   | 0      | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |