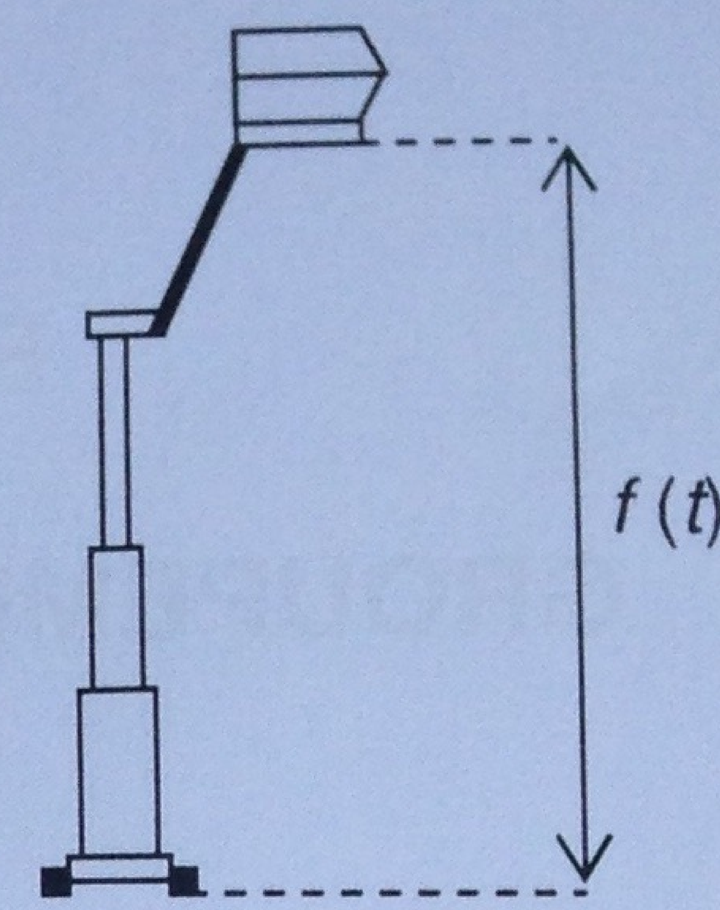
EXERCICE 1 (10 points)

Une société utilise, dans le cadre de son activité de nettoyage de vitres, une nacelle élévatrice à mât télescopique vertical. On souhaite étudier la durée nécessaire pour que la nacelle atteigne sa hauteur opérationnelle.

On note $f(t)$ la hauteur, en mètre, de la nacelle à l'instant t, en seconde. On suppose que f est une fonction de la variable t définie et dérivable sur $[0, +\infty[$.



Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0,3\,y = 3,6$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et y' la fonction dérivée de y.

1° Résoudre sur $[0, +\infty[$ l'équation différentielle (E_0) :

$$y' + 0,3\,y = 0.$$

On fournit les formules suivantes.

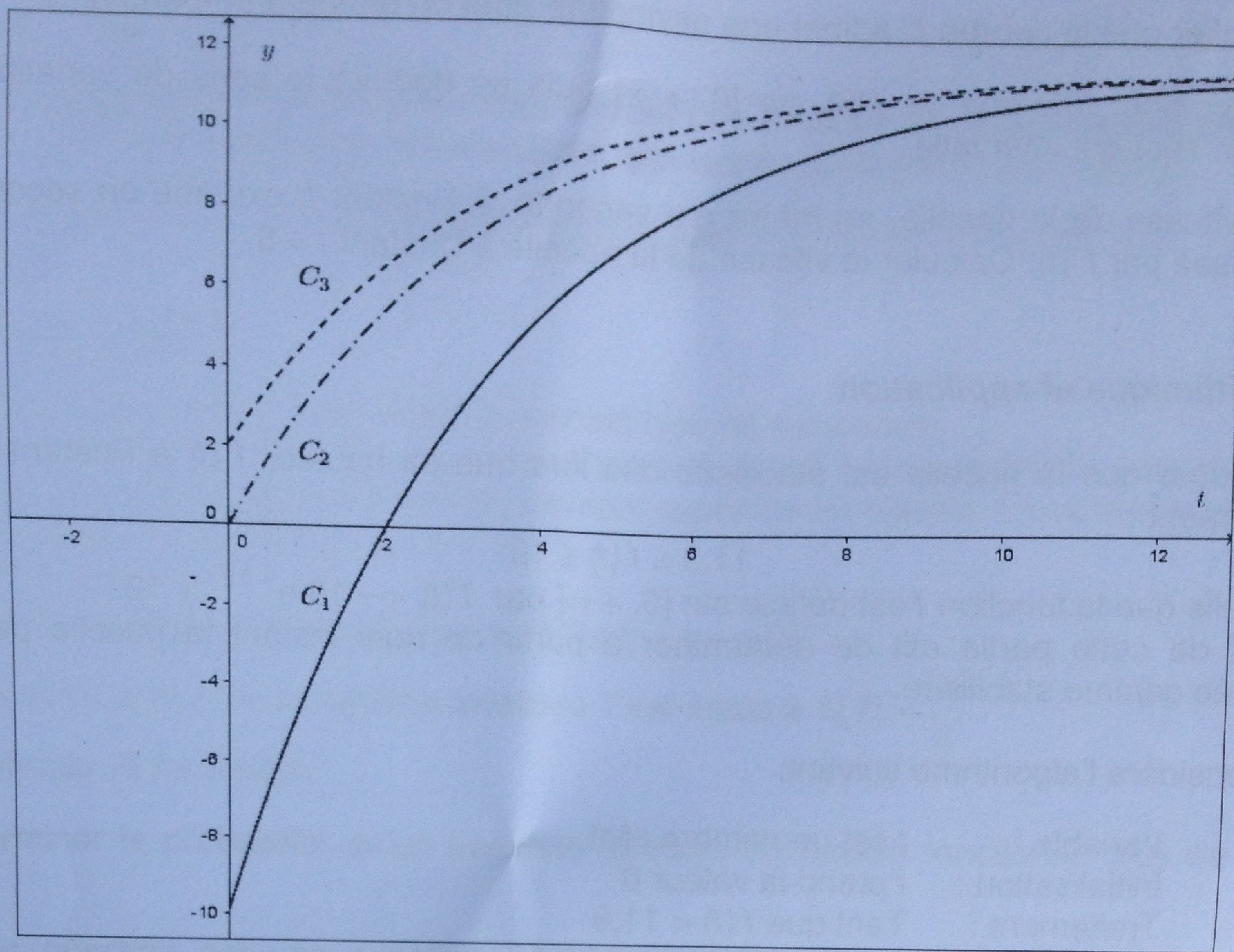
Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$y' + a\,y = 0$	$y(t) = k\,e^{-at}$

2° Vérifier que la fonction g, définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = 12$, est une solution de l'équation différentielle (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

On a représenté sur la page suivante, à l'aide d'un logiciel, certaines solutions de l'équation différentielle (E).



La courbe représentative de la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 2$ est :

la courbe C_1	la courbe C_2	la courbe C_3

B. Étude de fonction et application

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = -10\,e^{-0,3\,t} + 12$.
On rappelle que $f(t)$ désigne la hauteur de la nacelle, exprimée en mètre, à l'instant t, exprimé en seconde.

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère $(O\,;\ \vec{i},\ \vec{j})$.

1° Déterminer la hauteur de la nacelle à l'instant $t = 0$.

2° Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants que l'on admet et qui pourront être exploités dans les questions suivantes.

▸ Calcul formel	
1	f(t):=-10*exp(-0.3t)+12 → $\mathbf{f(t) := -10\,e^{-\frac{3}{10}t} + 12}$
2	Limite[f(t), +∞] → **12**
3	f(t) Dérivée: $\mathbf{3\,e^{-\frac{3}{10}t}}$

a) Justifier que la courbe C admet une asymptote dont on donnera une équation.

b) Déterminer le signe de $f'(t)$ sur $[0, +\infty[$ puis en déduire le sens de variation de la fonction f sur cet intervalle.

c) La vitesse de la nacelle, en mètre par seconde, à l'instant t, exprimé en seconde, est modélisée par $f'(t)$. Calculer la vitesse de la nacelle à l'instant $t = 0$.

C. Algorithmique et application

On considère que la nacelle est stabilisée dès lors que sa hauteur $f(t)$ à l'instant t vérifie l'encadrement :

$$11{,}9 \leq f(t) \leq 12.$$

On rappelle que la fonction f est définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = -10\,e^{-0{,}3\,t} + 12$.
L'objectif de cette partie est de déterminer à partir de quel instant la nacelle peut être considérée comme stabilisée.

1° On considère l'algorithme suivant.

```
Variable :         t est un nombre réel
Initialisation :   t prend la valeur 0
Traitement :       Tant que f (t) < 11,9
                      t prend la valeur t + 1
                   Fin de Tant que
Affichage          Afficher t
```

Faire tourner cet algorithme « à la main » en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

Étapes	Valeur de t	Valeur de $f(t)$	Condition $f(t) < 11{,}9$	Affichage
étape 1	0	$f(0) = 2$	VRAIE	aucun
étape 2	1	$f(1) \approx 4{,}59$	VRAIE	aucun
…/…	…/…	…/…	…/…	…/…
étape 14	13	$f(13) \approx 11{,}80$		
étape 15				
étape 16				
étape 17				

2° À partir de quel instant t_0, arrondi à la seconde, peut-on considérer que la nacelle est stabilisée ?

3° Proposer une modification de l'algorithme précédent afin qu'il permette d'obtenir une valeur approchée de t_0 arrondie au dixième.

ERCICE 2 (10 points)

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

Une entreprise conçoit des composants électroniques pour l'industrie automobile.

A. Loi exponentielle

Cette entreprise fabrique notamment un certain type de transistors.
On note T la variable aléatoire qui, à un transistor de ce type prélevé au hasard dans la production, associe sa durée de fonctionnement exprimée en heures. On admet que T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 5 \times 10^{-6}$.
On rappelle que :

– pour tout nombre réel positif t, on a $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$;

– l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T est égale à $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

1° Déterminer $P(T \leq 5\,000)$.

2° Déterminer la probabilité qu'un transistor prélevé au hasard fonctionne plus de 10 000 heures.

3° *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

La durée moyenne de fonctionnement d'un transistor de ce type est :

environ 200 000 ans	environ 23 ans	environ un an

30'/35'

B. Probabilités conditionnelles

L'entreprise dispose de deux sites de production : un premier site désigné par « site A » et un second site désigné par « site B ». Ces deux sites produisent des transistors. On admet que 80 % des transistors sont fabriqués sur le site A. On estime que 1 % des transistors fabriqués sur le site A sont défectueux, tandis que 3 % des transistors fabriqués sur le site B sont défectueux. On prélève au hasard un transistor dans l'ensemble de la production de transistors de cette entreprise. Tous les transistors ont la même probabilité d'être prélevés.
On considère les événements suivants :

A : « le transistor prélevé provient du site A » ;
B : « le transistor prélevé provient du site B » ;
D : « le transistor prélevé est défectueux ».

1° Donner, à partir des informations figurant dans l'énoncé, les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P_B(D)$. (On rappelle que $P_A(D)$ est la probabilité de l'événement D sachant que l'événement A est réalisé.)

2° a) Construire un arbre de probabilité ou un tableau correspondant à la situation.

b) Calculer $P(D)$.

3° Calculer la probabilité que le transistor prélevé provienne du site A sachant qu'il est défectueux.

50'

C. Loi binomiale

Un constructeur automobile sous-traite à cette entreprise la fabrication des cartes d'acquisition GPS pour la navigation embarquée, ce qui nécessite des transistors. L'entreprise constitue à cet effet un stock important de transistors. On prélève au hasard dans ce stock 150 transistors pour vérification.
On note E l'événement : « un transistor prélevé au hasard dans le stock est défectueux ».
On suppose que $P(E) = 0{,}014$. On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement des 150 transistors à un tirage avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 150 transistors ainsi défini, associe le nombre de transistors défectueux.

1° Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2° Déterminer, à l'aide de la calculatrice, $P(X = 2)$.

3° Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins un transistor défectueux parmi le prélèvement de 150 transistors.

58'

D. Intervalle de confiance

Dans cette partie on s'intéresse à la fabrication de condensateurs. On souhaite estimer la proportion p de condensateurs non conformes dans l'ensemble de la production. Pour cela on prélève au hasard un échantillon de 200 condensateurs dans la production. Cette production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 200 condensateurs.
On constate que 12 condensateurs de cet échantillon ne sont pas conformes.

1° Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de condensateurs non conformes dans la production.

2° Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 200 condensateurs ainsi prélevé dans la production, associe la fréquence de condensateurs non conformes.

On suppose que F suit la loi normale de moyenne inconnue p et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{200}}$.

a) Déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.

b) Est-on certain que la proportion p appartienne à cet intervalle de confiance ? Pourquoi ?

1h10.