BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS
Session 2013

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures **Coefficient : 2**

SUJET

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages, numérotées de 1 à 6.
L'annexe page 6 est à rendre avec la copie.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 2 pages numérotées 1 et 2.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

La clarté du raisonnement, la présentation et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte 3 exercices indépendants
qui seront traités sur des copies séparées.

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS		
Session 2013	Mathématiques	CPMAT
Coefficient : 2	Durée : 3 heures	6 pages

Exercice 1 (3 points)

Les quatre questions suivantes sont indépendantes. Pour les questions 2 et 4, toute trace de recherche, même non aboutie, sera valorisée.

1. Dans un repère de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(-2;4;1)$, $B(3;5;-1)$ et $C(0;3;4)$. Déterminer les coordonnées de l'isobarycentre G des points A, B et C.
2. Dans un repère orthonormé de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(1;3;2)$, $B(0;5;-2)$ et $C(a;2;2)$ où a est un nombre réel. Déterminer la valeur de a pour que le triangle ABC soit rectangle en A. On pourra utiliser le produit scalaire.
3. Soient les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ où a est un nombre réel.

   Déterminer a pour que le produit AB soit égal à $AB = \begin{pmatrix} -1 & 13 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$.
4. Soient les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$ où a, b et c sont des nombres réels. Déterminer les valeurs de a, b et c pour que l'on ait l'égalité matricielle suivante : $A \times B = C$.

Exercice 2 (7 points)

Les deux parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y'' + 4y' + 5y = 10x + 3$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$, y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle

$$(E_0) : \quad y'' + 4y' + 5y = 0\ .$$

2. Déterminer les constantes réelles a et b telles que la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -1$ et $f'(0) = 4$.

Partie B : étude locale d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 2e^{-2x}\sin(x) + 2x - 1$.
On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$.

1. **(a)** Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \mapsto e^{-2x}$.

   (b) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \mapsto \sin x$.

   (c) En déduire le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto e^{-2x}\sin(x)$.

   (d) Finalement, montrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est

$$f(x) = -1 + 4x - 4x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0\,.$$

2. **(a)** Déduire de la question précédente une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

   (b) Étudier les positions relatives de C et de T au voisinage du point d'abscisse 0 et illustrer cette situation par un schéma.

Exercice 3 (10 points)

Soit m un réel strictement positif dont on ne connait pas la valeur. orthogonal
On considère les points $P_0(0;0)$, $P_1(1;m)$ et $P_2(3;0)$ dans un repère ~~orthonormal~~ $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées. On remarque que P_0 est égal à O, origine du repère.
On considère la courbe de Bézier définie par les points de définition P_0, P_1, P_2. Soit t un réel variant entre 0 et 1.
On pose $B_{0,2}(t) = (1-t)^2$, $B_{1,2}(t) = 2t(1-t)$ et $B_{2,2}(t) = t^2$.
On rappelle que la courbe de Bézier définie par trois points de définition P_0, P_1, P_2 est décrite par le point $M(t)$ qui satisfait à l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^{2} B_{i,2}(t)\overrightarrow{OP_i}\,.$$

Comme m est variable on a une famille de courbes de Bézier de paramètre m.
On note Γ_m la courbe de Bézier associée au paramètre m.

Partie A : travail graphique

1. On prend $m = 8$. Placer les points P_0, P_1 et P_2 sur le graphique de l' **annexe page 6 à rendre avec la copie**.
2. Quels sont les éléments géométriques que vous pouvez déjà donner pour la construction de la courbe de Bézier définie par ces trois points de contrôle ?
3. Construire graphiquement (par la méthode des barycentres ou par toute autre méthode) le point $M(\frac{1}{2})$ de cette courbe.
4. À l'aide des questions 2) et 3) tracer l'allure de Γ_8, la courbe de Bézier correspondant à $m = 8$.
5. On prend maintenant $m = 1,5$. Placer, sur le même graphique, les nouveaux points P_1 et $M(\frac{1}{2})$ correspondant à cette valeur de m.
6. Tracer l'allure de $\Gamma_{1,5}$.

Partie B : travail numérique

Soit le point $A(1;2)$. On se demande s'il existe une courbe de la famille de courbes Γ_m qui passe par le point A.

1. Placer le point A sur le graphique. Au vu des deux courbes tracées dans la partie A, que peut-on supposer sur la valeur de m ?
2. Démontrer que les coordonnées de $M(t)$ parcourant Γ_m sont :

$$\begin{cases} x(t) &= t^2 + 2t \\ y(t) &= m \times 2t(1-t) \end{cases}$$

   On remarque que l'ordonnée de $M(t)$ dépend de t et de m.

3. Justifier que l'on est conduit à résoudre le système de deux équations à deux inconnues t et m suivant :

$$\begin{cases} t^2 + 2t - 1 & = 0 \qquad (1) \\ 2mt\,(1 - t) & = 2 \qquad (2) \end{cases}$$

4. On calcule d'abord les valeurs de t possibles. Pour cela, résoudre l'équation (1) pour t variant dans $[0; 1]$. En déduire qu'il existe une unique solution t_0 dont on donnera la valeur exacte.
5. Remplacer t par t_0 dans l'équation (2). En déduire qu'il existe une seule valeur de m possible que l'on notera m_0. En déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près.
6. Y a-t-il une courbe de la famille Γ_m qui passe par le point A ? Si oui, laquelle ?

Partie C : vérification

Pour la suite de l'exercice, on choisit pour m la valeur $m_0 = 4,12$.
On considère la courbe de Bézier Γ_{m_0}.

1. Un tableau de valeurs $(t, x(t), y(t))$, établi pour la valeur $m = m_0$, est proposé en **annexe page 6 à rendre avec la copie**. Compléter ce tableau à l'aide de la calculatrice . Donner les résultats arrondis à 10^{-2} .

On ne demande pas d'étudier les variations conjointes de $x(t)$ et $y(t)$.

2. Tracer Γ_{m_0} avec soin sur le graphique de l'**annexe page 6 à rendre avec la copie** .

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$ où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \dfrac{p-q}{2} \cos \dfrac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \dfrac{p+q}{2} \sin \dfrac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \dfrac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$

$\sin t = \dfrac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)\right)$, où $a = \alpha + i\beta$

2. CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$ $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$ $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha \ln t = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\operatorname{Arc}\sin t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\operatorname{Arc}\tan t$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha \quad (\alpha \in \mathbf{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$		
$\sin t$	$\cos t$	$e^{\alpha t} \quad (\alpha \in \mathbf{C})$	$\alpha e^{\alpha t}$
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1+\tan^2 t$		

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n\varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n\varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + t^n\varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n\varepsilon(t)$$

e) Équations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ .... où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda + \mu)e^{rt}$ ....où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = \left[\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)\right]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.