BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2014

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT E **_CODE : MATGRE_**

Durée : 1,5 heure

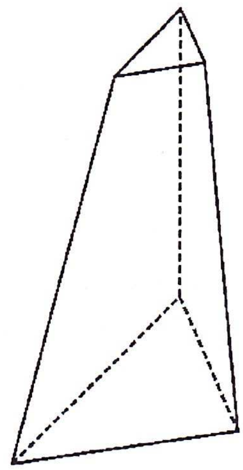
SPÉCIALITÉ	COEFFICIENT
CONCEPTEUR EN ART ET INDUSTRIE CÉRAMIQUE	1,5
DESIGN DE COMMUNICATION ESPACE ET VOLUME	1,5
DESIGN D'ESPACE	1,5
DESIGN DE PRODUIT	1,5

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.
Un formulaire de 2 pages est joint au sujet.
Le sujet comporte deux annexes à rendre avec la copie

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (10 points)

Un artisan souhaite concevoir un vase en céramique, dont la forme sera celle d'une pyramide tronquée à base triangulaire.



L'espace est muni d'un repère orthonormé

$(O\ ;\ \overrightarrow{OI}\ ,\ \overrightarrow{OJ}\ ,\ \overrightarrow{OK}\ )$ d'unité graphique réduite par rapport à la réalité.
Sur la figure donnée en annexe 1, on a déjà placé les points A, B, C et D de coordonnées :

$$A(6, 0, 0)\ ;\ B(4, 8, 0)\ ;\ C(-4, 0, 0)\ ;\ D(-4, 0, 20).$$

Le triangle ABC constitue la base du vase.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Étude de la base du vase

1° a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 48$.

c) Calculer les valeurs exactes des distances BA et BC.

d) En déduire la valeur approchée arrondie au degré de la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

2° En déduire que la valeur approchée de l'aire du triangle ABC, arrondie à l'unité d'aire, est 40 unités d'aire.

B. Représentation du vase

1° Montrer que le vecteur $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées : (160, 40, 80).
En déduire que le plan (ABD) a pour équation : $4x + y + 2z - 24 = 0$.

2° On note M le point d'intersection du plan (ABD) avec l'axe (Oz).
Déterminer les coordonnées de M puis placer ce point sur la figure donnée en annexe 1.

3° Pour créer l'embouchure du vase, on réalise la section de la pyramide ABCD par le plan passant par M et parallèle au plan (xOy).
Sur la figure donnée en annexe 1, représenter la pyramide ABCD, puis la section définie précédemment.

C. Contenance du vase

L'artisan souhaite que la contenance de son vase soit approximativement égale à un quart de litre.

1° a) Justifier que le segment [DC] est une hauteur de la pyramide ABCD.

b) Montrer que la valeur approchée du volume de ABCD, arrondie à l'unité, est 267 unités de volume.

(On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$, où $\mathscr{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur.)

2° *Cette question est un questionnaire à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

On admet l'égalité suivante : $DM = \frac{2}{5} DA$.

La valeur approchée, arrondie à l'unité, du volume du vase est :

17 unités de volume	107 unités de volume	160 unités de volume	250 unités de volume

3° Dans la réalité, l'unité de longueur est le centimètre. Une unité de volume sur le graphique correspond donc à un cm^3 dans la réalité.
On rappelle qu'un litre correspond à 1 dm^3.
La contenance du vase étudié précédemment va-t-elle satisfaire les exigences de l'artisan ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 (10 points)

Lors du réaménagement d'une base de loisirs, une municipalité décide d'implanter une piscine pour les jeunes enfants. La forme du bassin est dessinée en utilisant des courbes de Bézier.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm, on considère la courbe de Bézier C_1 définie par les points de contrôle $P_0(0, 2)$; $P_1(0, -6)$; $P_2(5, 2)$ et $P_3(7, 0)$.
Cette courbe a été tracée à l'aide d'un logiciel de géométrie dont une image d'écran est fournie à la question 3° a).
Elle est également tracée sur la figure donnée en annexe 2.

1° Placer les points P_0, P_1, P_2 et P_3 sur la figure donnée en annexe 2.

2° Quelle(s) tangente(s) à la courbe C_1 peut-on connaître sans effectuer aucun calcul ? Justifier la réponse puis tracer ces tangentes sur la figure donnée en annexe 2.

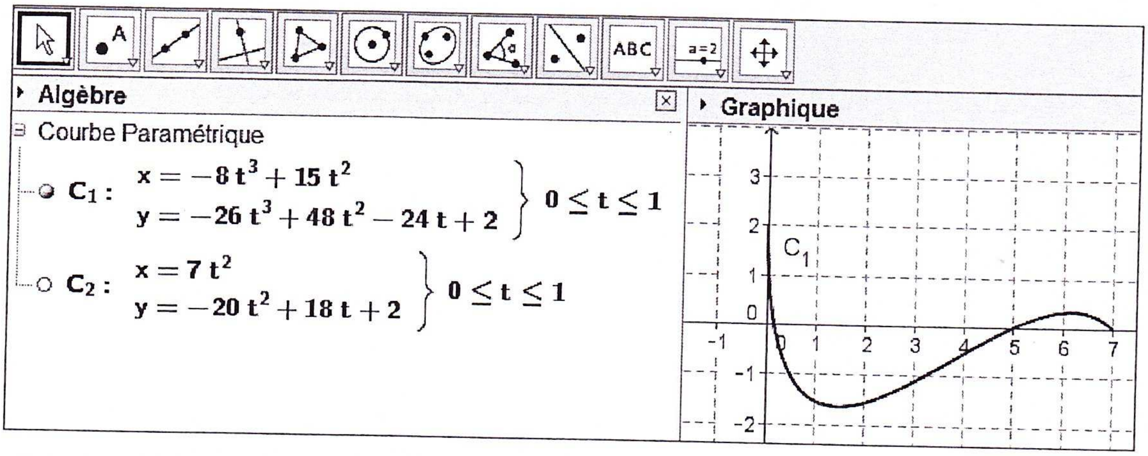
3° On considère maintenant la courbe de Bézier C_2 définie par les points de contrôle :

$P_0(0, 2)$; $P_4(0, 11)$ et $P_3(7, 0)$.

Cette courbe est l'ensemble des points M(t) tels que, pour tout t de l'intervalle [0, 1] :

$$\overrightarrow{OM(t)} = (1-t)^2\ \overrightarrow{OP_0} + 2t(1-t)\ \overrightarrow{OP_4} + t^2\ \overrightarrow{OP_3}.$$

a) Démontrer que les coordonnées x et y des points M(t) de la courbe C_2 ont pour expression : $x = f(t) = 7t^2$ et $y = g(t) = -20t^2 + 18t + 2$.
Ces expressions figurent dans la fenêtre algèbre du logiciel.



b) On considère les fonctions f et g définies pour t dans l'intervalle [0, 1] par :

$f(t) = 7t^2$ et $g(t) = -20t^2 + 18t + 2$.

Donner une expression des fonctions dérivées f' et g'.

c) Étudier les variations des fonctions f et g.
Rassembler les résultats dans un tableau unique.

4° a) Donner un vecteur directeur de la tangente à la courbe C_2 en chacun des points P_0 et P_3.

b) Les courbes C_1 et C_2 ont-elles la même tangente au point P_0 ? au point P_3 ?

c) *Cette question est un questionnaire à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
La courbe C_2 admet au point S, obtenu pour $t = 0{,}45$, une tangente de vecteur directeur :

$\vec{i}$	$\vec{j}$	$6{,}3\ \vec{i} + \vec{j}$	$1{,}417\,5\ \vec{i} + 6{,}05\ \vec{j}$

5° Sur la figure donnée en annexe 2, placer les points P_4 et S, puis tracer les tangentes à la courbe C_2 aux points P_0, S et P_3.
Tracer la courbe C_2.