BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2013

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT E — ***CODE : MATGRE***

Durée : 1,5 heure

SPÉCIALITÉ	COEFFICIENT
CONCEPTEUR EN ART ET INDUSTRIE CÉRAMIQUE	1,5
DESIGN DE COMMUNICATION ESPACE ET VOLUME	1,5
DESIGN D'ESPACE	1,5
DESIGN DE PRODUIT	1,5

Documents à rendre avec la copie

- Annexe 1 .... page 5
- Annexe 2 .... page 6

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.
Un formulaire de 2 pages est joint au sujet.

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (11 points)

Afin de consolider un meuble, un fabriquant souhaite concevoir une cale en la découpant dans un cube de 6 cm de côté.

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(A\ ;\ \overrightarrow{AI},\ \overrightarrow{AJ},\ \overrightarrow{AK})$ d'unité graphique 1 cm.
Le cube à découper est représenté sur la figure donnée en annexe 1 par $ABCDEFGH$. On le découpe selon le plan (BDL), où L est le point de coordonnées $(2, 0, 6)$.
Parmi les deux solides obtenus, la cale correspond à celui contenant le point A.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Une contrainte d'angle

Le cahier des charges demande que la mesure de l'angle $\widehat{DBL}$ soit comprise entre 65° et 70°.

1° a) Donner sans justification les coordonnées des points A, B, D et E.

b) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BL}$ et $\overrightarrow{BD}$.

c) Montrer que $\overrightarrow{BL} \cdot \overrightarrow{BD} = 24$.

2° a) Calculer les valeurs exactes des distances BL et BD.

b) En déduire la valeur approchée arrondie au degré de la mesure de l'angle $\widehat{DBL}$.
La contrainte d'angle est-elle respectée ?

B. Le plan de découpe

On souhaite découper le cube selon le plan (BDL).

1° a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(3, 3, 2)$ est un vecteur normal au plan (BDL).

b) Montrer que le plan (BDL) a pour équation $3x + 3y + 2z - 18 = 0$.

2° Soit M le point du segment $[EH]$ de coordonnées $(0, 2, 6)$.

a) Montrer que le point M appartient au plan de découpe (BDL).

b) Placer le point M sur la figure donnée en annexe 1, puis représenter sur cette figure la section du cube par le plan de découpe (BDL).

c) On rappelle que, parmi les deux solides obtenus, la cale est celui contenant le point A.
Combien la cale possède-t-elle de faces ?

C. Le volume de la cale

On admet que les droites (BL), (DM) et (AE) sont concourantes au point S de coordonnées (0, 0, 9).

1° Montrer que le volume de la pyramide SLEM est 2 cm^3.

(On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$, où $\mathscr{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur.)

2° *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

Le volume de la cale est :

6 cm^3	16 cm^3	52 cm^3	72 cm^3

3° Afin d'adapter sa cale à un meuble plus grand, le fabriquant décide d'en multiplier les dimensions par deux. Quel sera alors le volume de la nouvelle cale ?

EXERCICE 2 (9 points)

On veut créer une police de caractères en utilisant des courbes de Bézier.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$ d'unité graphique 2 cm, on considère la courbe de Bézier C_1 définie par les points de contrôle :

$$P_0(1, 3)\ ;\ P_1(3, -2)\ ;\ P_2(3, 1)\ \text{ et }\ P_3(1, 1).$$

Cette courbe est tracée sur la figure donnée en annexe 2.

1° Placer les points P_0, P_1, P_2 et P_3 sur la figure donnée en annexe 2.

2° Peut-on connaître, sans calcul, des tangentes à la courbe C_1 et, si oui, les nommer.

3° On considère maintenant la courbe de Bézier C_2 définie par les points de contrôle : $P_4(0, 0)$; $P_5(1{,}5\ ;\ 1)$ et $P_0(1, 3)$.
Cette courbe est l'ensemble des points $M(t)$ tels que, pour tout t de l'intervalle $[0, 1]$:

$$\overrightarrow{OM(t)} = (1-t)^2\,\overrightarrow{OP_4} + 2t\,(1-t)\,\overrightarrow{OP_5} + t^2\,\overrightarrow{OP_0}\,.$$

a) Démontrer que les coordonnées x et y des points $M(t)$ de la courbe C_2 ont pour expression : $x = f(t) = -2t^2 + 3t$ et $y = g(t) = t^2 + 2t$.

b) Étudier les variations des fonctions f et g définies pour t dans l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$f(t) = -2t^2 + 3t \quad\text{et}\quad g(t) = t^2 + 2t.$$

Rassembler les résultats dans un tableau unique.

4° a) Donner un vecteur directeur de la tangente à la courbe C_2 en chacun des points P_0 et P_4.

b) Expliquer pourquoi les courbes C_1 et C_2 n'ont pas la même tangente au point P_0.

c) *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Un vecteur directeur de la tangente à la courbe C_2 au point N obtenu pour $t = 0{,}75$ est :

$\vec{i}$	$\vec{j}$	$1{,}125\,\vec{i} + 2{,}062\,5\,\vec{j}$

5° Sur la figure donnée en annexe 2, placer les points P_4 et P_5, puis les tangentes à la courbe C_2 aux points P_0 et P_4.
Tracer la courbe C_2.